

Université de Bretagne Occidentale
UFR Sciences et Techniques
LICENCE 2 MIASHS

Espaces euclidiens

Contrôle continu, le 19 novembre 2024, 13h30–14h00

CORRIGE et BAREME

Exercice 1.

$$Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4xz + 2y^2 + 6yz - z^2. \quad (2 \text{ pts})$$

Exercice 2.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2 \text{ pts})$$

Exercice 3. a. Première méthode : On a

$$\begin{aligned} Q(x, y, z) &= xy + 2xz - 3yz - 5z^2 \\ &= xy + x(2z) + y(-3z) - 5z^2 \\ &= (x - 3z)(y + 2z) + 6z^2 - 5z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x - 3z + y + 2z)^2 - \frac{1}{4}(x - 3z - y - 2z)^2 + z^2 \\ &= \frac{1}{4}(x + y - z)^2 - \frac{1}{4}(x - y - 5z)^2 + z^2. \quad (2 \text{ pts}) \end{aligned}$$

Du coup, on pose

$$Q'(x', y', z') = \frac{1}{4}(x')^2 - \frac{1}{4}(y')^2 + (z')^2$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1 \text{ pt})$$

Remarquons que M est bien inversible car

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0,$$

et on a bien

$$Q'\left(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = Q(x, y, z).$$

Deuxième méthode : (pour ceux qui aiment les fractions) On a

$$\begin{aligned}
 Q(x, y, z) &= xy + 2xz - 3yz - 5z^2 \\
 &= -5(z^2 - \frac{2}{5}xz + \frac{3}{5}yz) + xy \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + 5(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + xy \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{9}{20}y^2 + xy \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}xy + \frac{9}{20}y^2 \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + \frac{1}{5}(x^2 + 2xy) + \frac{9}{20}y^2 \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + \frac{1}{5}(x + y)^2 - \frac{1}{5}y^2 + \frac{9}{20}y^2 \\
 &= -5(z - \frac{1}{5}x + \frac{3}{10}y)^2 + \frac{1}{5}(x + y)^2 + \frac{1}{4}y^2
 \end{aligned}$$

Du coup, on pose

$$Q'(x', y', z') = -5(x')^2 + \frac{1}{5}(y')^2 + \frac{1}{4}(z')^2$$

et

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que M est bien inversible car

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

et on a bien

$$Q'(M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = Q(x, y, z).$$

b. On détermine $P = M^{-1}$, par exemple par la méthode de Gauss-Jordan et pour la matrice M de la première méthode ci-dessus :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\
 &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une base de $\mathbf{R}^3$ orthogonale par rapport à Q est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\mathbf{3 \text{ pts}})$$